

電気回路 学年末試験対策資料

Nobuatsu Tomita

2026 年 2 月 4 日

本文書は電気回路 を受講する **2025 年度 沼津高専 電子制御工学科 2 年生**向けに作成されております。作者に無断での転載・転用はおやめください。

また、本文書は作者の所属する組織の見解を示したものではありませんので、予めご了承ください。

なお、本文書は参考文献リストのスライドの情報をまとめただけですので、この資料をむやみに公開しないようにしてください。(場合によっては参考文献の著作権の侵害にもなります。)

2026 National Institute of Technology, Numazu Collage,

Department of Electronic Control System Engineering, Nobuatsu Tomita All rights reserved.

目次

1	モチベーション	2
2	フェーザ表示	2
2.1	フェーザ表示を用いて R,L,C 回路素子の電圧／電流の関係を表現する	3
3	複素数のその演算	6
3.1	複素数のフェーザ表示	6
3.2	共役複素数	6
3.3	複素数の演算	6
4	正弦波交流の複素数表示	8
4.1	RLC 並列回路	9
5	インピーダンスとアドミタンス	11
5.1	抵抗 R の場合	11
5.2	インダクタンス L の場合	11
5.3	容量 C の場合	11
5.4	RLC 直列回路	12
5.5	RLC 並列回路	12
5.6	リアクタンス	12
5.7	サセプタンス	12
6	共振 (テストでないんだっけ . . . ?)	12

1 モチベーション

D 科の 3 年生にとって、交流理論は必須の知識である。そのため、進級するつもりのある学生は理解しておく必要がある。交流が必要な科目は次に示すものである。(3 年次開講科目で)

- 回路理論 (通年 2 単位)
- 電子回路 (通年 2 単位)
- 電子制御工学実験 (通年 4 単位)

これらは 3 年で開講される科目のみである。つまり、4,5 年生を含めるともっと多くの科目で交流を用いることになる。

いまから説明する内容は、交流の中でも**基礎的な事項**である。直流回路では、電圧・電流・抵抗の 3 要素の組み合わせだけだった。しかし、交流回路では、電圧・電流・周波数・抵抗・容量・インダクタンスの **6 要素の組み合わせ**である。直流回路において、3 要素の関連は加減乗除だけで表せた。しかし、交流回路では**微積分**も用いて表現する必要がある。

つまり、交流は直流よりも考慮すべき事項が増えているとわかる。そのため、3 年生になったときに、他の科目で勉強で時間がないのにもかかわらず、この交流を再度学び直すのは厳しそうだということには想像に難くない。そのため、いまから交流を学んでおこう。

ここまで読んでもらえたらならわかると思うが、来年度 3 年生にならない場合、やる必要がない。来年度も 2 年生の場合、再度回路定理を復習しておくことが良いだろう。テストを受けてわかったと思うが、計算が非常にめんどくさいので、なれておく必要がある。

今から説明する内容は、直流回路におけるオームの法則より前の、いわば「常識」である。例題で学ぶ優しい電気回路「直流編」(堀浩雄, 森北出版)における、第 1,2 章に相当する分野である。それだけ基礎的なことである。しかし、いかんせん 6 要素もあるので、それに見合った分だけ、ボリュームは大きい。根気強くやっつけていこうではないか。

2 フェーザ表示

交流の電圧・電流などは、つねに大きさと方向が変動している。正弦波交流を考えると、これは大きさと位相で表現できる。そのため、ここでは**位相ベクトル**という考え方を導入して、より簡潔に定義する。

私達が学習してきた正弦波交流電圧の瞬時値の式を次に示す。

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta) \quad (1)$$

この式から、位相ベクトル (これを以後フェーザという) で表現する。

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \angle \theta \quad (2)$$

フェーザ表示では、実効値と位相のみを用いて表す。

例題 2.1. 電流 $i(t) = 1.41 \sin(\omega t + 56.5^\circ)$ をフェーザ表示に直せ。

- 実効値 I_{rms} を求める。 $I_{rms} = \frac{1.41}{\sqrt{2}} \equiv 1$
- フェーザ形式に当てはめる。 $\dot{I} = 1 \angle 56.5^\circ$

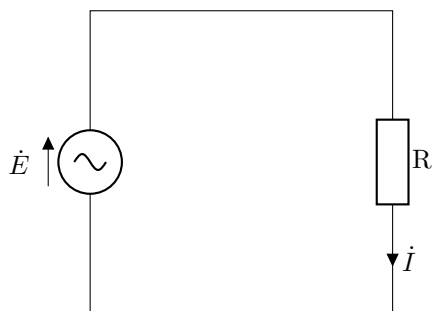


図1 抵抗 R の場合

2.1 フェーザ表示を用いて R,L,C 回路素子の電圧／電流の関係を表現する

2.1.1 抵抗 R の場合

このときの、電圧 $\dot{E}$ と電流 $\dot{I}$ の関係を考える。抵抗の場合オームの法則が成り立つので、抵抗 R を用いて次のように表される。

$$\dot{E} = R\dot{I}$$

ここで、電圧 $\dot{E}$ を、 $\dot{E} = E_{rms}\angle 0^\circ$ とする。つまり、電流 $\dot{I}$ は次のように表される。

$$\dot{I} = \frac{1}{R}\dot{E} = \frac{E_{rms}}{R}\angle 0^\circ \quad (3)$$

この式からわかる通り、位相差は発生しない。これを、**フェーザ図**であらわす。(I が原点から始まっていないが、みやすさのため。)

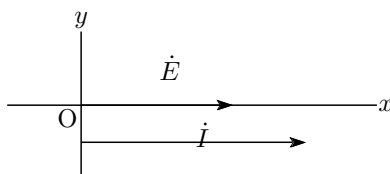


図2 抵抗 R でのフェーザ図

2.1.2 インダクタンス L の場合

インダクタンスとは？ インダクタンスとは、コイルの持つ性質の 1 つである。コイルに電流を流すと、その電流に逆らうように (打ち消すように) 磁場が発生する。もしこの働きがなければ、電流が流れると、コイルを全体としてみたときに、磁場が変化し続けることになる。自然界では、磁場が一定であるほうが安定なので、そちらに移行しようとする。その過程で、電流を打ち消すように磁場が発生する。

磁場を発生させるに当たり、コイルは流れる電流と**逆向きの電流を発生**させる。そのため、コイルの両端には、**逆起電力**という電圧が発生する。

これを数式で表す。逆起電力は流れる電流の微小変化量 (つまり平均変化率の極限) に比例する。ここで、比例定数を L 、流す電流を $i(t)$ 、逆起電力を $e(t)$ とする。このとき、これらの関係は、次式で表される。

$$e(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4)$$

以降、この比例定数 L を**インダクタンス**と表記する。単位は $[H]$ (ヘンリー) である。

このときの、電圧 $\dot{E}$ と電流 $\dot{I}$ の関係を考える。それぞれのフェーザ表示に対して、瞬時値を $e(t), i(t)$ とおく。インダクタンスの場合、さきほど述べた関係が成り立つ。ここで、式 (4) で遊んでみる。 $e(t)$ が $i(t)$ の微分であるので、

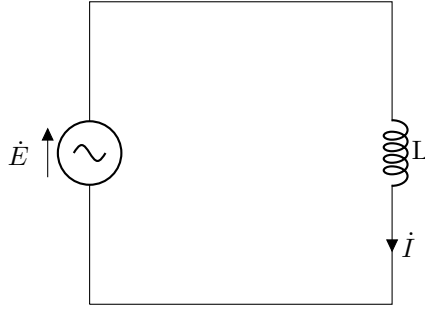


図3 インダクタンス L の場合

$i(t)$ は $e(t)$ の積分であると考えられる。そのため、

$$\begin{aligned}
 e(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\
 \frac{di(t)}{dt} &= \frac{e(t)}{L} \\
 \int \frac{di(t)}{dt} dt &= \int \frac{e(t)}{L} dt \\
 i(t) &= \frac{1}{L} \int e(t) dt
 \end{aligned} \tag{5}$$

これが成り立つ。ここで、 $\dot{E} = E_{rms} \angle 0^\circ$ とおくと、 $e(t) = \frac{E_{rms}}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + 0^\circ)$ となる。これを、式 (5) に代入し、 $i(t)$ を求める。

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{1}{L} \int E_{rms} \sqrt{2} \sin(\omega t + 0^\circ) dt \\
 &= \frac{E_{rms} \sqrt{2}}{L} \int \sin(\omega t + 0^\circ) dt \\
 &= -\frac{E_{rms} \sqrt{2}}{\omega L} \cos(\omega t + 0^\circ)
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$= \frac{E_{rms} \sqrt{2}}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ) \tag{7}$$

式 (6) から式 (7) への変形について説明する。まず、 $-\cos x$ に対する $\cos x$ の位相差は -180° である。さらに、 $\cos x$ と $\sin x$ の位相差は $+90^\circ$ である。 $-\cos x \Rightarrow \cos x \Rightarrow \sin x$ と、位相差を用いて変形した場合、最終的な位相差は $-180^\circ + 90^\circ = -90^\circ$ である。

これで、瞬時値がわかったので、フェーザ表示で電流 $i(t)$ を表す。

$$\dot{I} = \frac{E_{rms}}{\omega L} \angle -90^\circ \tag{8}$$

これもフェーザ図で表す。電圧 $\dot{E}$ と電流 $\dot{I}$ の位相差が 90° あり、電流のほうが遅れていることを示している。

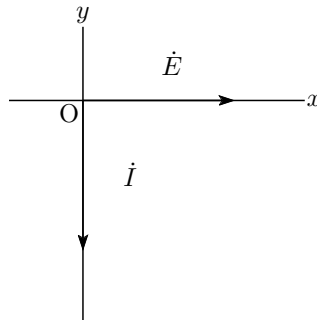


図4 インダクタンス L でのフェーザ図

2.1.3 容量 C の場合

容量とは？ 主にコンデンサがもつ性質の 1 つである。コンデンサは、2 極間の電圧が変わると、コンデンサ内の電荷が多すぎたり少なすぎたりする。そこで、コンデンサは流れる電流が変わることで、電荷の量を調節しようとする。つまり、コンデンサに流れる電流は、2 極間の電圧の変化に比例する。もっと言えば、2 極間の電圧の微小変化 (平均変化率の極限) に比例する。ここで、コンデンサに流れる電流を $i(t)$ 、比例定数を C 、加えた電圧を $e(t)$ とすると、これらは次式の関係にあると言える。

$$i(t) = C \frac{de(t)}{dt} \quad (9)$$

この式において、比例定数 C を**容量**や**キャパシタンス**、**静電容量**という。単位は $[F]$ (ファラッド) である。

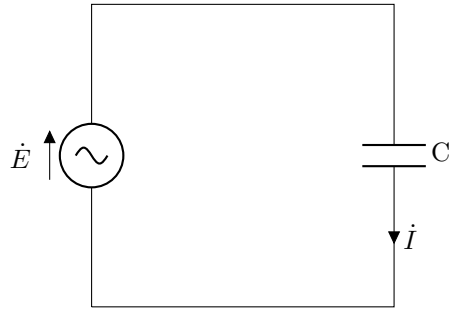


図 5 容量 C の場合

このときの、電圧 $\dot{E}$ と電流 $\dot{I}$ の関係を考える。それぞれのフェーザ表示に対して、瞬時値を $e(t), i(t)$ とおく。容量の場合、さきほど述べた関係が成り立つ。ここで、 $\dot{E} = E_{rms} \angle 0^\circ$ とおくと、 $e(t) = \frac{E_{rms}}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + 0^\circ)$ となる。

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{de(t)}{dt} \\ &= C \frac{E_{rms} \omega}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + 0^\circ) \\ &= \frac{CE_{rms} \omega}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + 90^\circ) \end{aligned} \quad (10)$$

これで、瞬時値がわかったので、フェーザ表示で電流 $i(t)$ を表す。

$$\dot{I} = CE_{rms} \omega \angle +90^\circ \quad (11)$$

これもフェーザ図で表す。電圧 $\dot{E}$ と電流 $\dot{I}$ の位相差が 90° があり、電流のほうが進んでいるということを示している。

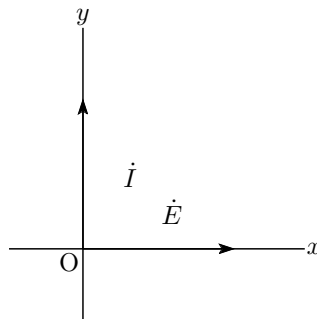


図 6 容量 C でのフェーザ図

3 複素数のその演算

フェーザ表示ではなく、複素数を用いる計算方法もある。なぜ複素数が良いのか説明するのはむずかしいので、ここでは省略する。複素数で表現するとき、次のようにして表現する。

$$\dot{Z} = x + jy$$

j は虚数単位である。 x は実部といい、複素数 $\dot{Z}$ を用いて $x = \text{Re}(\dot{Z})$ と表現することもある。さらに、 y は虚部といい、複素数 $\dot{Z}$ を用いて $y = \text{Im}(\dot{Z})$ と表現することもある。電気の複素数表示では、虚数単位 j を、虚部の前に置くこと。また、図 x に、複素平面 (ガウス平面) に表す。

さらに、 r と θ で表す、極座標表示もできる。なお、 θ は実軸と線分のなす角 (偏角) とする。極座標表示と x, y 平面は次のように変換できる。

$$x = r \cos \theta \quad (12)$$

$$y = r \sin \theta \quad (13)$$

で表す。この極座標表示を用いて、複素数 $\dot{Z}$ を考える。

$$\dot{Z} = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

ここで、座標平面より、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\theta = \arg \dot{Z} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ である。このとき、 r を、複素数の絶対値もしくは大きさという。

3.1 複素数のフェーザ表示

複素数をフェーザ表示するためには、次のような公式を用いる。

$$\dot{Z} = |\dot{Z}| \angle \theta$$

ここで、 $\dot{Z} = r(\cos \theta + j \sin \theta)$ とすると、

$$\dot{Z} = r \angle \theta$$

である。つぎに、オイラーの公式を紹介する。

定義 3.1. オイラーの公式： $\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$

世界一美しい公式 (?) といわれる $e^{i\pi} = -1$ はこれをもとに用いられる。

3.2 共役複素数

かけると実数になる 2 つの複素数のこと。複素数 $x + jy$ の共役複素数は $x - jy$ である。虚部の符号を反転させたものと考えて良い。

3.3 複素数の演算

3.3.1 相等

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 &\longleftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 \leftrightarrow r_1 = r_2, \theta_1 = \theta_2 (+2n\pi) \\ \dot{Z} = x + jy = 0 &\longleftrightarrow x = 0, y = 0 \\ \dot{Z} \rightarrow \infty &\longleftrightarrow x \rightarrow \pm\infty \text{ OR } y \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

3.3.2 加減算

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

3.3.3 乗算

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= r_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)r_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) \\ &= r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1r_2e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ |\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2| &= |\dot{Z}_1||\dot{Z}_2| = r_1r_2, \arg(\dot{Z}_1\dot{Z}_2) = \arg \dot{Z}_1 + \arg \dot{Z}_2\end{aligned}$$

3.3.4 除算

$$\begin{aligned}\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} &= \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)\} \\ &= \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \\ \left| \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} \right| &= \frac{|\dot{Z}_1|}{|\dot{Z}_2|} = \frac{r_1}{r_2} \\ \arg \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} &= \arg \dot{Z}_1 - \arg \dot{Z}_2\end{aligned}$$

3.3.5 j による乗除算

$\dot{A} = a + jb$ に対して j を乗じると、 $j\dot{A} = -b + ja$ となる。

$\dot{A}$ を j で割ると、 $\frac{\dot{A}}{j} = -j\dot{A} = b - ja$ となる。

3.3.6 その他

定理 3.1.

$$\dot{Z}^m = r^m(\cos m\theta + j \sin m\theta) = r^m e^{jm\theta}$$

これを、ド・モアブルの定理という。

4 正弦波交流の複素数表示

次の RLC 直列回路を考える。

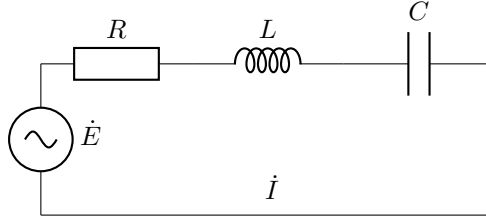


図 7 RLC 直列回路

ここで、 $\dot{E} = Ee^{j(\omega t + \theta)}$ を与えたとき、電流 $\dot{I} = Ie^{j(\omega t + \phi)}$ が流れたとする。ここで、それぞれの回路素子に加わる電圧の和は、電源電圧に等しいこと (キルヒホッフの電圧則) を用いて、次の式を立てる。なお、式 (9) は、次のようにも考えられる。(電圧 = 電流は微分の関係のため)

$$e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (14)$$

この式を用いて、

$$R\dot{I} + \frac{1}{C} \int \dot{I} dt + L \frac{d\dot{I}}{dt} = e(t) \quad (15)$$

となる。これを計算する。

$$\begin{aligned} R\dot{I} + \frac{1}{C} \int \dot{I} dt + L \frac{d\dot{I}}{dt} &= RIe^{j(\omega t + \phi)} + \frac{1}{C} \int Ie^{j(\omega t + \phi)} dt + L(Ie^{j(\omega t + \phi)})' \\ &= RIe^{j(\omega t + \phi)} + \frac{1}{jC\omega} Ie^{j(\omega t + \phi)} + jL\omega Ie^{j(\omega t + \phi)} \\ &= Ie^{j(\omega t + \phi)} \left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega \right) = \dot{E} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{E} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega \right) \dot{I} \quad (17)$$

ここで、 $\dot{I}$ の係数を**複素インピーダンス**といい、記号 $\dot{Z}$ で表現する。交流回路での電流の流れやすさを示す。次に、この複素インピーダンス $\dot{Z}$ について遊んでみる。

$$R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad (18)$$

ここで $R = r \cos a$ 、 $L\omega - \frac{1}{C\omega} = r \sin a$ とおく。これらを満たす数 (r, a) を考える。ここで、 $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\text{縦軸}}{\text{横軸}}$ を利用する。

$$\tan^{-1} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = a$$

である。虚部は縦軸、実部は横軸である。さらに、 r は、複素インピーダンス $\dot{Z}$ の絶対値 Z と等しい。これは、フェーザ図において、その線分の長さとなるためである。つまり、

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \\ a &= \tan^{-1} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \\ \dot{Z} &= Z(\cos a + j \sin a) = Ze^{ja} \end{aligned}$$

となる。

ここで、式 (17) を $\dot{I}$ について変形し、 $\dot{Z}$ を代入する。

$$\begin{aligned}
 \dot{E} &= \dot{Z}\dot{I} \\
 \dot{I} &= \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} \\
 &= \frac{\dot{E}}{Ze^{ja}} \\
 &= \frac{\dot{E}}{Z}e^{-ja} \\
 &= \frac{Ee^{j(\omega t + \theta)}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}e^{-ja} \\
 Ie^{j(\omega t + \phi)} &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}e^{j(\omega t + \theta - a)} \quad (19)
 \end{aligned}$$

係数を比較すると、 I と ϕ には次のような関係があるとわかる。

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \\
 \phi &= \theta - a = \theta - \tan^{-1} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}
 \end{aligned}$$

では、複素数と瞬時値の関係を見ておこう。まずは、オイラーの公式を用いて、電圧の式を変形してみる。

$$\dot{E} = Ee^{j(\omega t + \theta)} = E \cos(\omega t + \theta) + jE \sin(\omega t + \theta)$$

ここでわかるのは、複素数表示において、**虚数部の $\sqrt{2}$ 倍が瞬時値を示している**ということがわかる。

では、式 (19) で遊んでみる。オイラーの公式より、

$$\dot{I} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}e^{j(\omega t + \theta - a)} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \left\{ \cos(\omega t + \theta - a) + j \sin(\omega t + \theta - a) \right\} \quad (20)$$

よって、虚部は $\frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t + \theta - a)$ となり、瞬時値は次のようになる。

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t + \theta - a) \quad (21)$$

4.1 RLC 並列回路

次の RLC 並列回路を考える。

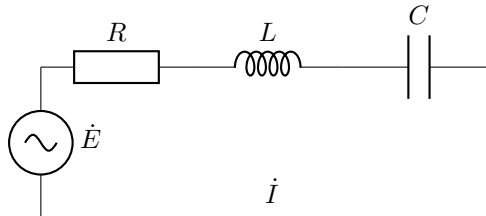


図8 RLC 並列回路 (図を差し替える時間はありませんでした・・・)

ここで、 $\dot{E} = Ee^{j(\omega t + \theta)}$ を与えたとき、電流 $\dot{I} = Ie^{j(\omega t + \phi)}$ が流れたとする。ここで、それぞれの回路素子に流れる電流の和は、電源に流れる電流に等しいこと (キルヒホッフの電流則) を用いて、次の式を立てる。

$$\frac{\dot{E}}{R} + C \frac{d\dot{E}}{dt} + \frac{1}{L} \int \dot{E} dt = \dot{I} \quad (22)$$

となる。これを計算する。

$$\frac{\dot{E}}{R} + C \frac{d\dot{E}}{dt} + \frac{1}{L} \int \dot{E} dt = \frac{E e^{j(\omega t + \theta)}}{R} + C(E e^{j(\omega t + \theta)})' + \frac{1}{L} \int E e^{j(\omega t + \theta)} dt \quad (23)$$

$$= \frac{E e^{j(\omega t + \theta)}}{R} + j\omega C E e^{j(\omega t + \theta)} + \frac{E}{j\omega L} e^{j(\omega t + \theta)} dt \quad (24)$$

$$= E e^{j(\omega t + \theta)} \left(\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \quad (25)$$

$$I e^{j(\omega t + \phi)} = E e^{j(\omega t + \theta)} \left(\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \quad (26)$$

$$\dot{I} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \dot{E} \quad (27)$$

$$(28)$$

ここで、 $\dot{E}$ の係数を**複素アドミタンス**といい、記号 $\dot{Y}$ で表現する。交流回路での電流の流れやすさを示す。複素インピーダンスの逆数である。次に、この複素インピーダンス $\dot{Y}$ について遊んでみる。

$$\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \quad (29)$$

ここで $\frac{1}{R} = r \cos a$ 、 $C\omega - \frac{1}{L\omega} = r \sin a$ とおく。これらを満たす数 (r, a) を考える。ここで、 $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\text{縦軸}}{\text{横軸}}$ を利用する。

$$\tan^{-1} \frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}} = \tan^{-1} R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) = a$$

である。虚部は縦軸、実部は横軸である。さらに、 r は、複素インピーダンス $\dot{Z}$ の絶対値 Z と等しい。これは、フェーザ図において、その線分の長さとなるためである。つまり、

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2} \\ a &= \tan^{-1} R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \\ \dot{Y} &= Y(\cos a + j \sin a) = Y e^{ja} \end{aligned}$$

となる。

ここで、式 (27) を変形する。

$$\dot{I} = \dot{Y} \dot{E} \quad (30)$$

$$I e^{j(\omega t + \phi)} = Y e^{ja} E e^{j(\omega t + \theta)} \quad (31)$$

$$I e^{j\phi} = Y E e^{j(\theta + a)} \quad (32)$$

$$= E \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2} e^{j(\theta + a)} \quad (33)$$

係数を比較すると、 I と ϕ には次のような関係があるとわかる。

$$\begin{aligned} I &= E \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2} \\ \phi &= \theta + a = \theta + \tan^{-1} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \end{aligned}$$

この式で遊んでみると、直列回路のときのように、瞬時値を求められる。ここはご自身で計算していただきたい。

5 インピーダンスとアドミタンス

直流で言う「抵抗」をインピーダンス、「コンダクタンス」をアドミタンスという。インピーダンスやアドミタンスは実数であるが、交流回路の解析のときには複素数で計算する。そこで、本書では、複素インピーダンス・複素アドミタンスと、インピーダンス・アドミタンスは明確に区別する。

つまり、複素インピーダンス $\dot{Z}$ は、電圧 $\dot{E}$ 、電流 $\dot{I}$ を用いて定義できる。

$$\dot{Z} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} \quad (34)$$

また、複素インピーダンスからインピーダンスを求める場合、複素インピーダンスの絶対値を取れば良い。

$$Z = |\dot{Z}| \quad (35)$$

5.1 抵抗 R の場合

この場合は、インピーダンス・複素インピーダンスともに $Z = R$ である。位相の変化はない。

5.2 インダクタンス L の場合

インダクタンス L の場合の電流 $\dot{I}$ は式 (8) である。ここでは、 $\dot{E} = E_{rms} \angle 0^\circ$ とおいているので、式 (34) より、

$$\begin{aligned} \dot{Z}_L &= \frac{\dot{E}}{\dot{I}} \\ &= \frac{E_{rms} \angle 0^\circ}{\frac{E_{rms}}{\omega L} \angle -90^\circ} \\ &= \frac{E_{rms} e^{j0}}{\frac{E_{rms}}{\omega L} e^{-j90^\circ}} \\ &= \omega L e^{j90^\circ} \\ &= \omega L (\cos 90^\circ j \sin 90^\circ) \\ &= j\omega L \end{aligned} \quad (36)$$

これが、インダクタンス L のインピーダンスである。

5.3 容量 C の場合

容量 C の場合の電流 $\dot{I}$ は式 (11) である。ここでは、 $\dot{E} = E_{rms} \angle 0^\circ$ とおいているので、式 (34) より、

$$\begin{aligned} \dot{Z}_C &= \frac{\dot{E}}{\dot{I}} \\ &= \frac{E_{rms} \angle 0^\circ}{CE_{rms} \omega \angle +90^\circ} \\ &= \frac{E_{rms} e^{j0}}{CE_{rms} \omega e^{j90^\circ}} \\ &= \frac{1}{C\omega} e^{-j90^\circ} \\ &= \frac{1}{C\omega} (\cos -90^\circ j \sin -90^\circ) \\ &= -j \frac{1}{C\omega} = -j \frac{1}{C\omega} \frac{j}{j} = \frac{1}{j\omega C} \end{aligned} \quad (37)$$

これが、容量 C のインピーダンスである。

5.4 RLC 直列回路

式 (17) より、複素インピーダンスは、

$$\dot{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega \quad (38)$$

である。なお、インピーダンスは抵抗と同様に、直列の場合は代数和、並列の場合は和分の積等に対応できる。

5.5 RLC 並列回路

和分の積で対応する。

$$\dot{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} \quad (39)$$

$$= \frac{1}{\frac{jL\omega - RLC\omega^2 + R}{jRL\omega}} \quad (40)$$

$$= \frac{jRL\omega}{jL\omega - RLC\omega^2 + R} \quad (41)$$

$$= \frac{jRL\omega}{jL\omega + R(1 - \omega^2 LC)} \quad (42)$$

$$= \frac{jRL\omega \{-jL\omega + R(1 - \omega^2 LC)\}}{L^2\omega^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2} \quad (43)$$

$$= \frac{RL^2\omega^2 + j\omega LR^2(1 - \omega^2 LC)}{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2} \quad (44)$$

5.6 リアクタンス

複素インピーダンス $\dot{Z}$ の虚部 $Im(\dot{Z})$ をリアクタンスといい、記号 X で表記する。定義は $X = Im(\dot{Z})$ 。とくに、リアクタンスが負のときを容量性リアクタンス、正のとき誘導性リアクタンスという。

5.7 サセプタンス

複素アドミタンス $\dot{Y}$ の虚部 $Im(\dot{Y})$ をサセプタンスといい、記号 B で表記する。定義は $B = Im(\dot{Y})$ 。

6 共振 (テストでないんだっけ・・・?)

次のような RLC 直列回路を考える。

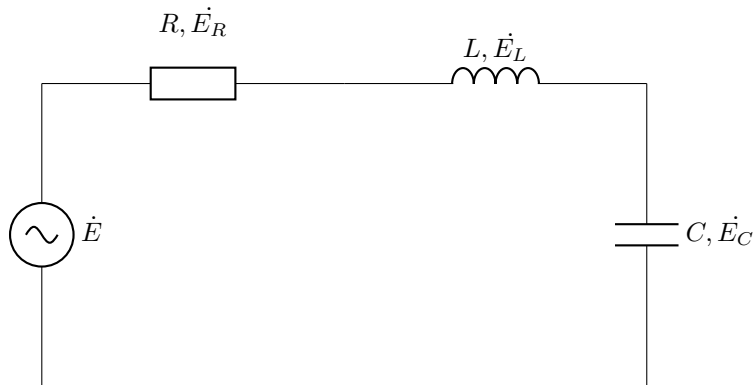


図 9 RLC 直列回路

ここに与える電圧の角速度 ω が $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ のとき、抵抗 R にかかる電圧 $\dot{E}_R$ は次の式で表される。

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_R &= \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \dot{E} \\
 &= \frac{j\omega RC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} \dot{E} \\
 &= \frac{j \frac{RC}{\sqrt{LC}}}{j \frac{RC}{\sqrt{LC}} - 1 + 1} \dot{E} \\
 &= \frac{j \frac{RC}{\sqrt{LC}}}{j \frac{RC}{\sqrt{LC}}} \dot{E} \\
 &= \dot{E}
 \end{aligned}$$

つまり、抵抗にかかる電圧が、電源の電圧に等しくなる。さらに、

$$\begin{aligned}
 \dot{Z} &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\
 &= \frac{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}{j\omega C} \\
 &= \frac{\frac{jRC}{\sqrt{LC}} - 1 + 1}{\frac{jC}{\sqrt{LC}}} \\
 &= \frac{jRC}{jC} = R
 \end{aligned}$$

となり、インピーダンスが R となる。つまり、虚部が 0 ということになる。このように、RLC 回路において、 $Im(\dot{Z}) = 0$ となるケースを、 L と C が共振であるという。

ちなみに、インダクタンスと容量にかかる電圧も求めてみよう。

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_L &= \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \dot{E} \\
 &= \frac{-\omega^2 LC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} \dot{E} \\
 &= \frac{-1}{\frac{jRC}{\sqrt{LC}} - 1 + 1} \dot{E} \\
 &= \frac{-\sqrt{LC}}{jRC} \dot{E} \\
 &= \frac{j\sqrt{LC}}{RC} \dot{E}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_C &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \dot{E} \\
 &= \frac{1}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} \dot{E} \\
 &= \frac{1}{\frac{jRC}{\sqrt{LC}} - 1 + 1} \dot{E} \\
 &= \frac{\sqrt{LC}}{jRC} \dot{E} \\
 &= -\frac{j\sqrt{LC}}{RC} \dot{E}
 \end{aligned}$$

では、 $L = 10[\mu H]$ 、 $C = 10[\mu F]$ 、 $R = 10[\Omega]$ 、 $\dot{E} = 1.5[V]$ とする。このとき、 $\omega = 1.0 \times 10^5 [rad/s]$ である。こ

のときのそれぞれの電圧を求める。

$$\begin{aligned}E_R &= 1.5[V] \\E_L &= \frac{j\sqrt{100 \times 10^{-6}}}{100 \times 10^{-6}} \times 1.5 \\&= \frac{j10 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-6}} \times 1.5 \\&= \frac{j10 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-5}} \times 1.5 \\&= \frac{j}{10^{-2}} \times 1.5 \\&= j150[V] \\E_C &= -\frac{j\sqrt{LC}}{RC} \times 1.5 \\&= -\frac{j10 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-6}} \times 1.5 \\&= -\frac{j}{10 \times 10^{-3}} \times 1.5 \\&= -150[V]\end{aligned}$$

なんとも、抵抗にかかる電圧は 1.5V だというのに、インダクタや容量には 150V という高電圧がかかっているではないか。共振というのはこういったことを引き起こす。力学で言う固有振動数で揺さぶられると共振して大きな振動になるのと同じ理屈である。